billiard系に於ける周期軌道の統計性

名古屋大学　大学院理学研究科　物質理学専攻（物理系）　浅水屋 剛[1] , 小西 哲郎

周期軌道の相関は量子カオスという文脈で極めて重要な役割を果たす。Gutzwiller の跡公式は準位密度を総ての古典周期軌道に関する和として表している [3]。$d(E)$ は準位密度で $\bar{d}(E)$,$d_{osc}(E)$ は各々その平均, 揺らぎの部分である。

$$d(E) = \bar{d}(E) + d_{osc}(E) = \bar{d}(E) - \frac{1}{\pi}\Im\sum_{\kappa}\sum_{p}\frac{1}{i\hbar}B_p^{\kappa}T_p\exp\left[\kappa i\left(\frac{1}{\hbar}S_p(E) - \frac{\pi}{2}\sigma_p\right)\right] \quad (1)$$

T_p,B_p^{κ},$S_p(E)$,σ_p は各々周期軌道の周期, 安定性,action,Maslov 指数で、これらは総て正準変換に対して不変である。p は周期軌道の index,κ は繰り返しの回数を表す。この跡公式が絶対収束しない級数であるという事や spectral form factor の数値計算等から周期軌道相関が指摘されてきた [1]。

周期軌道相関の議論で対象となるのは spectral form factor（SFF）という量である [2]。

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\bar{d}(E)}\langle d_{osc}(E+\eta/2)\, d_{osc}(E-\eta/2)\rangle_E \exp\left[-2\pi i\eta\tau\bar{d}(E)\right], \tau = T/2\pi\hbar\bar{d}(E) \quad (2)$$

SFF は時間反転対称な系でランダム行列理論 [4] から (3)、半古典論 (1) から (4) の形に各々書ける。

$$K^{GOE}(\tau) = 2\tau - 2\tau^2 + \ldots, \qquad \text{for} \quad \tau < 1 \quad (3)$$

$$K^{scl}(\tau) \approx \frac{1}{2\pi\hbar\bar{d}(E)}\sum_{p,p',\kappa,\kappa'}\left\langle B_p^{\kappa}B_{p'}^{\kappa'}T_pT_{p'}\exp\left(i\frac{\kappa S_p - \kappa' S_{p'}}{\hbar}\right)\delta\left(T - \frac{\kappa T_p + \kappa' T_{p'}}{2}\right)\right\rangle_E \quad (4)$$

(3) の 2τ の項については (4) の対角項によるものであると理解されている [2]。対して $2\tau^2$ の項に関しては非対角項であるという事以上に半古典論による理解は進んでいなかった。

近年非対角項に寄与するであろう周期軌道の組に関し Sieber-Richter によって提案がなされた [6]。寄与する組は自身で微小角度で交差する軌道とその近傍を回る軌道から成る。彼等はその交差角分布の見積りから $-2\tau^2$ の項を再現したが、問題が無い訳ではない。(4) に書き下されている量は総て正準不変であるのに対し、交差角は正準変換に対して不変な量ではない。この事から周期軌道相関の議論に交差角を用いるのは不適当であるとも言える。決定的な事に、彼等の議論は交差角を定義できない系では適用できないものであり、少なくとも概念の拡張は必要である。

本研究では 4-disk,8-sphere billiard 系に於いて (5) で定義される action pair difference$N_{\Delta L,m}$ を求めた。(4) から非対角項への寄与では exp の位相の相殺が重要だからである。更に 4-disk 系では交差角分布 $N_{\Delta\theta,m}$(6) についても調べた。disk と sphere の半径は各々 $r = 0.5, 0.95, 1.0$ で計算をしている。ただし L は周期軌道の長さ、M, m は整数 $(m = 0, 1, \ldots, M-1)$ である。

$$N_{\Delta L,m} = \sharp\{p, p', \kappa, \kappa' \mid m\Delta L \le |L_{p,\kappa} - L_{p',\kappa'}| < (m+1)\Delta L\}, \quad \Delta L = |L_{p,\kappa} - L_{p',\kappa'}|_{max}/M \quad (5)$$

$$N_{\Delta\theta,m} = \sharp\{\text{crossing angle } \theta \mid m\Delta\theta \le \theta < (m+1)\Delta\theta\}, \quad \Delta\theta = \pi/M \quad (6)$$

[1]E-mail: asamizu@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp, URL: http://jegog.phys.nagoya-u.ac.jp/~asamizu/

図1の $N_{\Delta L,m}$ を見ると首藤, 池田 [5] に見られるような波構造が $r=0.5$ で生じているのがわかる。しかも各々の波の中でより細かい波構造が見られる。ところが $r=0.95, 1.0$ でそのような構造は無い。普遍性の観点からこの性質が SFF の $-2\tau^2$ の項に寄与するとは考えにくい。一方 $N_{\Delta\theta,m}$ を見るとこちらでも $r=0.5$ と $r=0.95, 1.0$ とで劇的な変化が見られる。ただしこれは総ての交差についての分布なので Sieber-Richter が指している交差のみを捉えてはいない。ただ $N_{\Delta L,m}$ 同様これ程性質の異なる物が SFF に関する普遍的な議論の対象になるとは考えにくい。

何れにせよ対象は位相の相殺であるから問題は極めて厄介である。これまでは周期軌道を直接的に漠然と対象にしたが、間接的にでも力学的な骨組みと関係付けるべきなのではないか。例えば双曲系に於いては記号力学の pruning front との関係を見る事が重要なのかもしれない。

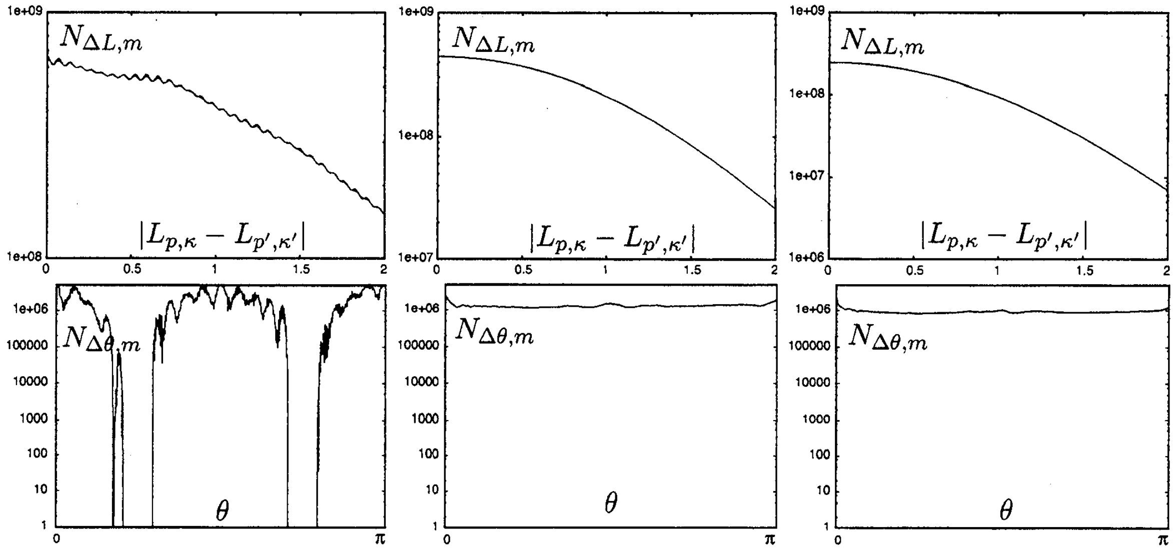

図 1: 4-disks billiard に於ける周期軌道の action pair difference (上) と自己交差角度の分布 (下)
(左)：$r=0.5$ (pruning 前) (中)：$r=0.95$ (pruning 直後) (右)：$r=1.0$ (pruning 後)

参考文献

[1] N. Argaman, et.al., *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 26, pp. 4326–4329, 1993.

[2] M.V. Berry. *Proc. Roy. Soc. London A*, Vol. 400, p. 229, 1985.

[3] M.C.Gutzwiller. *Chaos in Classical and Quantum Mechnaics.* Springer–Verlag, 1990.

[4] Madan Lan Mehta. *Random Matrices.* Academic Press, 1991.

[5] Akira Shudo and Kensuke Ikeda. *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, Vol. 116, pp. 283–293, 1994.

[6] Martin Sieber and Klaus Richter. *Physica Scripta*, Vol. T90, pp. 128–133, 2001.